

## แผนการสอนรายคาบที่ 13

รหัสวิชา 2201 - 2402 วิชา คณิตศาสตร์คอมพิวเตอร์ จำนวน 3 หน่วยกิต  
เรื่อง พีชคณิตแบบบูล โดย ครูฉัตรมงคล สนั่นพลา

### 1. จุดประสงค์การสอน

- ทราบกฎพื้นฐานต่างๆ สมมติฐานและทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน
- มีความรู้ความเข้าใจในการทำงานของพีชคณิตบูลีน
- เห็นความสำคัญและความจำเป็นในการศึกษาเรื่องบูลีน

### 2. รายการสอน

- บทนำ
- พีชคณิตแบบบูล
- สมมติฐานแบบบูล
- สมมติฐานที่ 1 คำจำกัดความ
- สมมติฐานที่ 2 กฎการแทนค่า
- สมมติฐานที่ 3 กฎการมีอยู่ของ 1 และ 0
- สมมติฐานที่ 4 กฎการสลับที่
- สมมติฐานที่ 5 กฎการเปลี่ยนกลุ่ม
- สมมติฐานที่ 6 กฎการแจกแจง
- สมมติฐานที่ 7 กฎการมีอยู่ของคอมพลิเมนต์
- ทฤษฎีแบบบูล

### 3. เนื้อหาสาระ

#### พีชคณิตบูลีน (Boolean Algebra)

พีชคณิตบูลีนเป็นเทคนิคทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการวิเคราะห์ปัญหาทางด้านตรรก (Logic) โดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อ นายจอร์จ บูล (George Boole) ได้พัฒนาทฤษฎีเบื้องต้นทางคณิตศาสตร์มาประยุกต์ใช้ในปี ค.ศ.1847 เพื่อการแก้ปัญหาด้านตรรก ต่อมาในปี ค.ศ.1938 เคลาด์ แชนนอน (Claude Shannon) นักวิทยาศาสตร์แห่งห้องทดลองเบลล์ (Bell Laboratory) ได้สังเกตเห็นประโยชน์ของพีชคณิตบูลีน โดยนำมาใช้ในการวิเคราะห์

วงจรเน็ตเวิร์กที่ทำงานต่อกันหลายๆ ภาค เช่น วงจรของโทรศัพท์ เป็นต้น เมื่อมีการพัฒนาวงจรคอมพิวเตอร์ขึ้นก็ได้มีการนำเอาพีชคณิตบูลีนมาใช้ใน

การคำนวณ ออกแบบ และอธิบายสถานะการทำงานของสถานะวงจรภายในระบบคอมพิวเตอร์ โดยพีชคณิตบูลีนเป็นพื้นฐานสำคัญในการออกแบบ

วงจรตรรกของระบบดิจิทัล

ในทางคณิตศาสตร์ผลของพีชคณิตบูลีน จะมีเพียงจริง (true) กับเท็จ (false) เท่านั้น นักวิทยาศาสตร์จึงนำเอาแนวคิดนี้มาใช้ในการทำงานของ วงจรอิเล็กทรอนิกส์ที่มีสถานะเพียงเปิดวงจรหรือปิดวงจร เมื่อนำไปใช้ในการออกแบบการทำงานของ คอมพิวเตอร์ก็จะบอกถึงสภาพของวงจรในรูปแบบของ เปิดกับปิด โดยมีสถานะการทำงานเป็น 1 เมื่อทำงานหรือ 0 เมื่อไม่ทำงาน ซึ่งตัวเลขดังกล่าวเป็นตัวเลข ในระบบของเลขฐานสอง แต่สถานะที่เป็นวงจร สามารถอธิบายในรูปของวงจรตรรกได้ ทำให้ง่ายต่อการออกแบบและอธิบายการทำงานมากกว่าพีชคณิต ทั่วไป

### ทฤษฎีบทพีชคณิตบูลีน

เมื่อเราทราบถึงแนวคิดพื้นฐานของพีชคณิตบูลีนมาแล้ว ต่อไปเป็นการศึกษาถึงกฎเกณฑ์ต่าง ๆ เพื่อการ นำเอาพีชคณิตบูลีนไปใช้ในการแก้ปัญหาสมการต่าง ๆ ในการออกแบบและการใช้งานวงจรดิจิทัลใน รูปแบบที่เป็นโลจิกเกต โดยทฤษฎีของพีชคณิตบูลีนมีทั้งที่เป็นคุณสมบัติเบื้องต้นตามหลักการทาง คณิตศาสตร์ และที่เป็นทฤษฎีบทโดยเฉพาะสำหรับพีชคณิตบูลีนเท่านั้น ถ้าสามารถทำความเข้าใจทฤษฎีบทจนสามารถนำไปใช้งานได้ ก็จะแก้ปัญหา ในการใช้งาน อุปกรณ์ ประเภทโลจิกเกตที่เป็นอุปกรณ์จริงทางด้านดิจิทัลได้ และเป็นพื้นฐานสำคัญในการออกแบบระบบ ดิจิทัลขั้นสูงต่อไป

### คุณสมบัติเบื้องต้นของพีชคณิตบูลีน

$0 \cdot 0 = 0$	สมการที่ 1
$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	สมการที่ 2
$1 \cdot 1 = 1$	สมการที่ 3
$0 + 0 = 0$	สมการที่ 4
$0 + 1 = 1 + 0 = 1$	สมการที่ 5
$1 + 1 = 1$	สมการที่ 6
$A + 1 = 1 + A = 1$	สมการที่ 7
$A \cdot 0 = 0 \cdot A = 0$	สมการที่ 8
$A + 0 = 0 + A = A$	สมการที่ 9
$A \cdot 1 = 1 \cdot A = A$	สมการที่ 10
$A + A = A$	สมการที่ 11
$A \cdot A = A$	สมการที่ 12
$A + A = 1$	สมการที่ 13
$A \cdot A = 0$	สมการที่ 14

### กฎการสลับที่ (Commutative Law)

$$A + B = B + A \quad \text{สมการที่ 15}$$

$$A \cdot B = B \cdot A \quad \text{สมการที่ 16}$$

### กฎการจัดหมู่ (Associative Law)

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad \text{สมการที่ 17}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \text{สมการที่ 18}$$

$$(A+B)+C = A+(B+C) = A+B+C \quad \text{สมการที่ 19}$$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C \quad \text{สมการที่ 20}$$

### กฎการกระจาย (Distribution)

$$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B + C) \quad \text{สมการที่ 21}$$

$$(A + B) \cdot (A + C) = A + (B \cdot C) \quad \text{สมการที่ 22}$$

คุณสมบัติของกฎการกระจายเป็นสูตรที่สามารถพิสูจน์ได้ โดยการเขียนเป็นตารางความจริง จะสามารถบอกชัดถึงผลที่ได้จากสมการสองฝั่งว่ามีความเท่าเทียมกันจริง คัดตัวอย่าง สมการที่ 21 เมื่อนำมาเขียนเป็นตารางความจริง จะพบว่าผลของสมการทั้งสองจะได้ค่าออกมาเท่ากัน

1	2	3	4	5	6
A B C	A.B	A.C	B + C	A.B + A.C	A(B + C)
0 0 0	0	0	0	0	0
0 0 1	0	0	1	0	0
0 1 0	0	0	1	0	0
0 1 1	0	0	1	0	0
1 0 0	0	0	0	0	0
1 0 1	0	1	1	1	1
1 1 0	1	0	1	1	1
1 1 1	1	1	1	1	1

จากตารางความจริงอธิบายได้ว่า

ช่องที่ 1 เป็นค่าของตัวแปร ABC สามตัวที่มีค่าไม่ซ้ำกันเลย

ช่องที่ 2 เป็นผลการแอนด์ระหว่าง A.B

ช่องที่ 3 เป็นผลการแอนด์ระหว่าง A.C

ช่องที่ 4 เป็นผลการออร์ระหว่าง B + C

ช่องที่ 5 เป็นการออร์กันระหว่างผลช่องที่ 2 กับช่องที่ 3 เป็นสมการทางซ้ายของสมการที่ 21

ช่องที่ 6 เป็นการแอนด์กันระหว่างค่าของ A จากช่องที่ 1 กับผลของช่องที่ 4 เป็นสมการทางขวามือของสมการที่ 21

เมื่อดูผลในช่องที่ 5 และ 6 แล้ว จะพบว่ามีความเท่ากัน จากตารางความจริงจึงสามารถพิสูจน์ได้ว่า  $A \cdot B + A \cdot C = A(B + C)$  จริง

### กฎการดูดกลืน (Absorption Law)

ถ้า A และ B เป็นตัวแปรหรือนิพจน์ใด ๆ แล้ว จะได้ว่า

$$A + AB = A \quad \text{สมการที่ 23}$$

$$A(A+B) = A \quad \text{สมการที่ 24}$$

$$A + AB = A + B \quad \text{สมการที่ 25}$$

$$A(A + B) = A \cdot B \quad \text{สมการที่ 26}$$

### กฎความสอดคล้อง (Consensus Law)

$$AB + AC + BC = AB + AC \quad \text{สมการที่ 27}$$

$$(A + B)(A + C)(B + C) = (A + B)(A + C) \quad \text{สมการที่ 28}$$

### ทฤษฎีของ เดอ มอร์แกน (De Morgan's Theorem)

$$\overline{\overline{A}} = A \quad \text{สมการที่ 29}$$

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \quad \text{สมการที่ 30}$$

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B} \quad \text{สมการที่ 31}$$

บรรดากฎต่าง ๆ ทางพีชคณิตบูลีนทั้งหลาย เป็นการกำหนดขึ้นตามหลักการทางคณิตศาสตร์ แต่จะมีบางบทที่เขียนเป็นทฤษฎีโดยนักคณิตศาสตร์เช่น ทฤษฎีของเดอ มอร์แกน เป็นการนำตัวแปร A และ B มาแสดงในรูปของพีชคณิตบูลีน ได้ออกมาเป็นทฤษฎีเฉพาะที่แตกต่างไปจากกฎทั่วไปพิสูจน์ทฤษฎีนี้ได้ จากตารางความจริงเช่นเดียวกัน

1	2	3	4	5	6	7	8
A B	A + B	A · B	A	B	A · B	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A + B}$
0 0	0	1	1	1	1	1	1
0 1	1	0	1	0	0	1	1
1 0	1	0	0	1	0	1	1
1 1	1	0	0	0	0	0	0

การพิสูจน์ทฤษฎีของเคอ มอร์แกน ตามสมการที่ 30 และสมการที่ 31 สามารถอธิบายได้ดังต่อไปนี้

ช่องที่ 1 เป็นค่าของตัวแปร A และ B

ช่องที่ 2 เป็นผลของการออร์กันระหว่าง A และ B

ช่องที่ 3 เป็นผลการอินเวอร์สการออร์กันของ A และ B

ช่องที่ 4 เป็นผลการอินเวอร์สค่าของ A จากตารางช่องที่ 1

ช่องที่ 5 เป็นผลการอินเวอร์สค่าของ B จากตารางช่องที่ 1

ช่องที่ 6 เป็นผลการแอนด์กันระหว่างผลของ A และ B จากช่องที่ 4 และ 5 จะเห็นได้ว่าผลที่ได้ในช่องที่ 3 กับช่องที่ 6 มีค่าเท่ากันทุกประการ เป็นไปตามสมการที่ 30

ช่องที่ 7 เป็นผลการอินเวอร์สของค่า A แอนด์กับ B

ช่องที่ 8 เป็นผลการออร์กันระหว่างผลของช่องที่ 4 และ 5 จะเห็นได้ว่าผลที่ได้ระหว่างช่องที่ 7 กับช่องที่ 8 จะมีค่าเท่ากันทุกประการ เป็นไปตามสมการที่ 31

#### 4. สื่อและวัสดุอุปกรณ์

1. สไลด์ เรื่องระบบจำนวน
2. กระดานไวท์บอร์ด ปากกาไวท์บอร์ด

#### 5. ลำดับชั้นการสอน

1. ครูผู้สอนบรรยายทฤษฎีพร้อมสื่อการเรียนประกอบ
2. ครูผู้สอนสาธิตในการเรียนภาคปฏิบัติ

#### 6. การประเมิน

1. ผู้เรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาที่เรียน
2. ผู้เรียนสามารถปฏิบัติงานได้ตามที่เรียน
3. แบบฝึกหัดหรือการปฏิบัติงาน